



核心素养的主要表现——空间观念&几何直观



主讲：鲍建生

思考

- ▶ 什么是空间观念与几何直观？两者有什么联系与区别？
- ▶ 空间观念、几何直观与几何课程的学习有什么关系？
- ▶ 为什么新课标重视几何直观？几何直观在代数教学中有什么作用？

目录

空间观念与几何直观的基本特点

01

空间观念行为表现的细化

02

几何直观行为表现的细化

03

空间观念与几何直观的教学建议

04

01

空间观念与几何直观的基本特点



(1) 什么是空间观念？

空间感或空间意识

是动物的一种本能，在能力心理学及各类智力测验中都把其作为能力的基本成分之一。





(1) 什么是空间观念？

根据皮亚杰等人的儿童认知发展理论，儿童空间认知的形成与发展将经历三个阶段：

拓扑阶段（约3岁～4岁），

- 儿童能注意到图形的内或外及封闭的曲线，但不能把握图形的正确形状；

投影阶段（约4岁～7、8岁），

- 儿童对外界的认知主要通过直观，只有经过视觉确认的事物，他们才认为是真实的存在，在视觉之外的事物都不真实，他们相信各种形状都会根据视角的变化而变化；

度量阶段（约5岁开始），

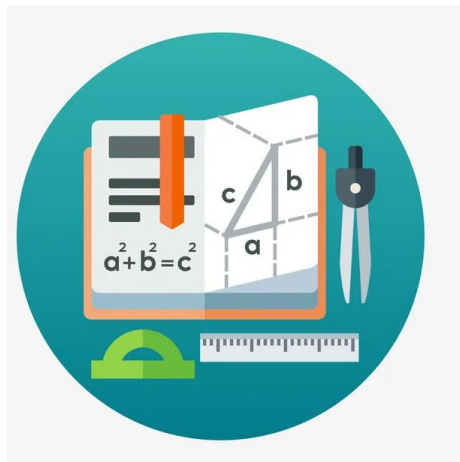
- 儿童可以获得长度及距离概念，他们已具备有关于线段长短、角度大小或面积大小的意识。从度量开始，儿童可以进入欧式几何的学习。



(2) 什么是几何直观？

几何直观

就是利用图形去探究、描述、分析和洞察事物或问题的结构与关联，感悟事物的本质。这种观察与思维方式在抽象程度很高的数学及数学学习中尤为重要。





(2) 什么是几何直观？

根据范希尔理论，儿童的几何认知大致可以划分为五个层次：



直观：

能分析图形的组成要素及特征，并依此建立图形的特性，利用这些特性解决几何问题，但无法解释性质间的关系；



分析：

能分析并利用图形的组成要素及特征解决几何问题，但无法解释性质间的关系，不能理解几何定义；



非形式的演绎：

能建立图形及图形性质之间的关系，可以提出非形式化的推论，进一步探求图形的内在属性和其包含关系，使用公式与定义及发现的性质做演绎推论。但不能了解证明与定理的重要性；



(2) 什么是几何直观？

根据范希尔理论，儿童的几何认知大致可以划分为五个层次：



形式的演绎：

了解到证明的重要性和“不定义元素”“定理”和“公理”的意义，确信几何定理是需要形式逻辑推演才能建立的；

能猜测并尝试用演绎方式证实其猜测，也能建立定理间的关系网络，比较定理的不同证明方式；



严谨：

能在不同的公理系统下严谨地建立定理以分析比较不同的几何系统。



(3) 高中阶段的直观想象

内涵	表现	意义
直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用空间形式特别是图形，理解 and 解决数学问题的素养	① 借助空间形式认识事物的位置关系、形态变化与运动规律； ② 利用图形描述、分析数学问题； ③ 建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型，探索解决问题的思路	➤ 提升数形结合的能力，发展几何直观和空间想象能力； ➤ 增强运用几何直观和空间想象思考问题的意识； ➤ 形成数学直观，在具体的情境中感悟事物的本质

——《普通高中数学课程标准》（2017，2020）



(4) 初中阶段“空间观念”的内涵解析

22版《课标》

空间观念主要是指对空间物体或图形的形状、大小及位置关系的认识。

- 能够根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图形想象出所描述的实际物体；
- 想象并表达物体的空间方位和相互之间的位置关系；
- 感知并描述图形的运动和变化规律。

形成空间观念有助于理解现实生活空间物体的形态与结构，是形成空间想象力的经验基础。



(5) 初中阶段“几何直观”的内涵解析

22版《课标》

几何直观主要是指运用图表描述和分析问题的意识与习惯。

- 能够感知各种几何图形及其组成元素，依据图形的特征进行分类；
- 根据语言的描述画出相应的图形，分析图形的性质；
- 建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型；
- 利用图表分析实际情境与数学问题，探索解决问题的思路。

建立几何直观有助于把握问题的本质，明晰思维的路径。



(6) “空间观念”与“几何直观”的联系



空间观念与几何直观都涉及两种基本的图形操作活动：

- 一是解释空间与图形所蕴含的信息，其中包括对视觉表征及在几何图形、图表、图示中使用的空间与图形语言的理解；
- 二是视觉与表象加工，其中包括基于几何概念的空间想象，对视觉表征及视觉表象的操作和转换。



**空间观念的发展基础是生活经验与空间意识，
几何直观则更依赖于几何知识与数学活动。**



空间观念与几何直观都是进一步形成直观想象的基础。



(7) 空间观念与几何直观的定位

“三会”	各阶段的主要表现			跨学科表现
	小学	初中	高中	
数学的眼光	数感	抽象能力	数学抽象	创新意识
	量感			
	符号意识			
	几何直观	几何直观	直观想象	
	空间观念	空间观念		
数学的思维	运算能力	运算能力	数学运算	应用意识
	推理意识	推理能力	逻辑推理	
数学的语言	数据意识	数据观念	数据分析	
	模型意识	模型观念	数学建模	

02

空间观念行为表现的细化

表现之一：能够根据物体特征形成表象，抽象出几何图形，根据几何图形形成所描述实际物体的表象

 初中阶段的学生已经比较系统地学习了几何图形的各种性质，可以通过逻辑推理确认表象的特征与空间关系，在用几何图形描述空间物体时有更多的方式，也更为精确：

- 能够依据三维物体的组成、形状与结构等形成空间表象，抽象出几何图形，并利用几何图形的性质描述空间物体的几何特征。
- 能够根据语言描述形成表象，根据表象描述实际的物体或景象，并作出相应的平面图形。

表现之一：能够根据物体特征形成表象，抽象出几何图形，根据几何图形形成所描述实际物体的表象

 初中阶段的学生已经比较系统地学习了几何图形的各种性质，可以通过逻辑推理确认表象的特征与空间关系，在用几何图形描述空间物体时有更多的方式，也更为精确：

- 能够对几何图形进行多种表征、解释、转换，并生成新的图形。例如，能够通过表象操作在头脑中“展开”一些简单立体图形，然后画出平面展开图；能够把一个三角形剪拼成一个面积相等的矩形；利用两块三角板的拼接形成各种几何图形，并提出相应的几何问题等。



表现之二：

能感知、想象并表达物体的空间方位和相互之间的位置关系

长度、角度是描述空间方位、物体形状大小及相互关系的基本工具，也是测量与几何的基本研究对象。对长度与角度的感知是空间观念的表现之一，也是精确描述空间形式与位置关系的基础；





表现之二：

能感知、想象并表达物体的空间方位和相互之间的位置关系



能利用长度与角度研究两条直线的相对位置关系，并由此讨论平面图形的边、角关系，在头脑中形成一定的表象。



初步感悟维度的概念，利用维度构建空间表象。维度是空间的本质属性，对维度的理解有助于空间观念的结构化。



能从多种途径感知立体图形与平面图形的联系，知道处理空间问题的一条基本途径是转化为平面问题。



能将三维空间的现实问题转化为数学问题。



能在现实三维世界中利用平面几何知识解决跨学科的实际问题，如课程标准附录中的案例“绘制公园平面地图”。



表现之三：

能感知并描述图形的运动和变化规律，并用于解决相关问题



几何图形的运动与变换对学生的几何直观与空间观念都有较高的要求，也是培养几何直观与空间观念的有效途径：

- 能将现实世界中的刚体运动与对称性抽象为几何变换，也能用几何变换解释、分析、探究现实世界中的运动过程与对称性。
- 能将二维图形的对称性化归为点与线段的对称性，通过确定对应点的位置确定对应的图形。



表现之三：

能感知并描述图形的运动和变化规律，并用于解决相关问题



几何图形的运动与变换对学生的几何直观与空间观念都有较高的要求，也是培养几何直观与空间观念的有效途径：

- 能通过表象操作预见到简单图形经过几何变换后的结果。例如，可以通过对一条线段的轴对称变换，构成一个角或者一个矩形，而且对称轴就是这个角的角平分线或者这个矩形的一组对边的平分线。
- 能够运用几何变换解决简单的问题。

03

几何直观行为表现的细化



表现之一：

通过尺规作图、折纸、剪拼等操作活动，感知图形的结构特征



尺规作图是欧式几何的基础，通过尺规作图的操作过程有助于学生感知和研究图形的组成元素、结构与位置关系：

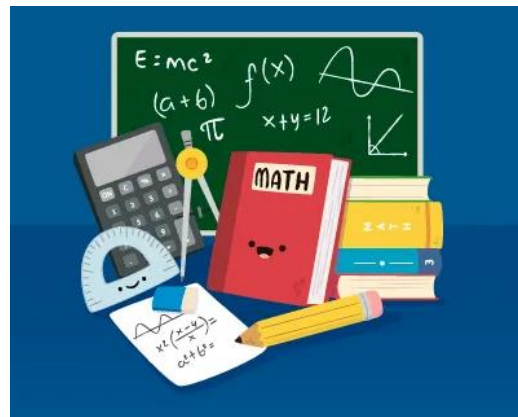
- 能够用直尺和圆规作出基本图形，感悟尺规作图的合理性及图形的几何特征。
- 能够利用尺规作图探讨几何图形的存在性与形状特征。例如，通过尺规作图发现：给定什么样的三条线段才可以作出一个钝角三角形、直角三角形、锐角三角形、等腰三角形。
- 能够利用折纸、剪拼等操作活动对简单图形进行变换、分解与组合，解释操作过程的几何原理及操作前后图形的关系。折纸的数学原理就是轴对称，图形的剪拼活动可以直观感知图形的形状和大小，形成头脑中的表象，为空间想象建立直观基础。



表现之二：

能够利用图形表示、理解和解释几何概念与命题，进行几何推理

初中阶段的几何课程主要属于基于图形全等与相似的综合几何。所有的几何概念、性质、命题都可以通过图形直观表示，这也是几何直观在几何中的基本表现形式；





表现之二：

能够利用图形表示、理解和解释几何概念与命题，进行几何推理



能够用图形表示和解释几何概念的内涵与外延。例如，通过画图说明什么是平行四边形，依据平行四边形的定义说明哪一组对边平行且相等；能够给出不同形状、不同位置、不同背景下的平行四边形的图形变式。



能够用图形表示几何关系，形成直觉表象。如用下面的直观示意图表示两条平行线的判定与性质，在头脑中形成具有确定几何意义的表象。



能够在问题情境中，进行实物情境、文字语言、符号语言和图形表示之间的转换与解释，对文字和符号表达的图形信息形成几何直观。



表现之三：

能够利用变换、坐标表示图形的运动与性质，感悟数形结合的思想



所有几何都是研究某种变换下的不变性，欧式几何对应的是刚体运动不变性，图形的重合是初中研究轴对称、平移与旋转的基础：

- 通过观察，能够发现自然界及日常生活中的各种对称现象，能将这些对称现象与图形的变换建立联系，用图形的变换解释对称性。
- 通过实物操作，能够直观解释三种几何变换之间的联系与区别。例如，可以用不同的途径将一个图形平移到新的位置。
- 能够利用方格纸或尺规作图对简单图形进行平移、轴对称和旋转变换，分析各种变换的基本特点，研究变换前后两个图形之间的对应关系，形成初步的几何直观。



表现之三：

能够利用变换、坐标表示图形的运动与性质，感悟数形结合的思想



所有几何都是研究某种变换下的不变性，欧式几何对应的是刚体运动不变性，图形的重合是初中研究轴对称、平移与旋转的基础：

- 能够从几何变换的视角观察与分析几何图形，探讨图形的运动特征。在简单情况下，能够预见图形经过变换后的结果。
- 能够在平面直角坐标系中分析点与图形的对称性。例如，关于y轴的两个对称点的坐标可以写成 (x, y) $(-x, y)$ ，反之亦然。



表现之四：

能够运用图表工具表示、分析问题情境中的数量关系，构建模型，解决问题

“一幅画顶一千字”，图表具有信息量大、整体性强、直观明了等特点。

几何直观是一种高效的表达工具，在数学中有广泛应用：

- 能够解释代数表示的几何意义。例如，知道一个数的绝对值表示这个数对应的点到数轴原点的距离。
- 能够用图表分析实际问题中的相等与不等关系，并在此基础上列方程与不等式解决问题，养成画图表思考的习惯。图表便于揭示变量之间的数量关系和变化规律，看清问题的数学结构特征，判断相应方程或不等式的类型；也便于解释与验证解题的结果。
- 能够利用函数列表建立自变量与函数值之间的对应关系，利用图像讨论函数的性质，在函数表达式与图像之间建立联系。

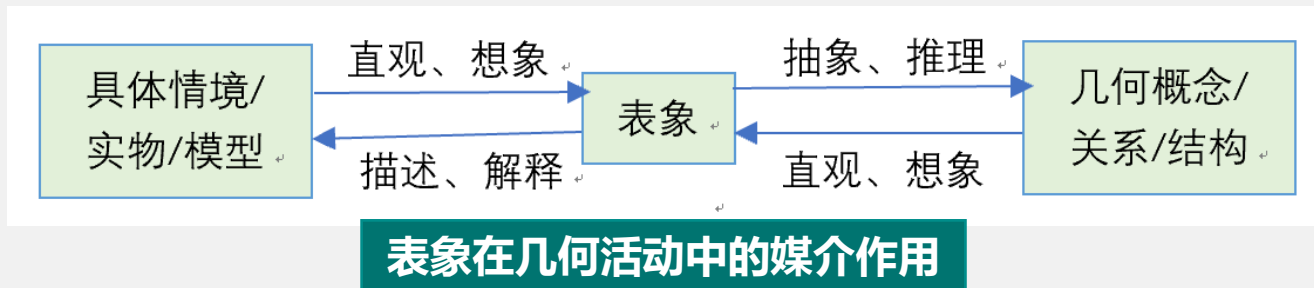
04

空间观念&几何直观的教学建议



(1) 表象操作是形成空间观念的关键

- ▶ 空间观念的形成与发展，一般要经过实物操作、表象操作、图形/符号操作的过程，其中头脑中表象的形成、感知、操作与描述是发展空间观念的关键。因此，空间观念本质上是借助表象操作对空间形式的理解。
- ▶ 几何的研究对象既是抽象的结果，又具有一定的直观性，**几何的这种二重性得益于表象的媒介作用：**





(2) 图形的变换与构造活动是发展空间观念&几何直观的有效途径

对空间物体与图形的形状、大小及位置关系的认识一般涉及以下几个环节：

- 通过三维空间物体或图形的视觉在头脑中形成表象；
- 在原有视觉经验的基础上，对表象进行心理操作，包括转换、组合、模式匹配等，形成明确的表征方案；
- 根据表征方案利用作图工具画出相应的平面图形；
- 利用所学的平面几何知识对图形的空间结构、性质、特征进行分析、探究、推理，得出合乎逻辑的猜想或结论
- 利用所得的猜想或结论经由表象对原始物体与图形作出判断或解释。

这一系列的过程都与图形的构造、表征与转换有一定的联系。



(3) 尺规作图、折纸、剪拼等操作活动是建立几何直观的基础

图形操作活动一般涉及三种认知过程：



视觉过程，

- ✓ 通过对物体与图形的感知、操作，建立相应的几何表象与空间知觉，与原有的视觉经验和几何知识建立联系，对问题情境中的空间形式与数量关系作出判断与直观解释；



构造过程

- ✓ 在视觉过程的基础上抽象出几何结构与关系，并构造出相应的图形，利用图形表示、分析实际情境和问题；



推理过程，

- ✓ 借助于图形及其几何性质，运用逻辑推理探索新的几何性质、证明相关的命题或者解决实际问题。



感谢您的倾听!



鲍建生