

教学
参考

知识分类与数学教学设计

上海复旦初级中学 赵志英 (邮编:200063)

华东师范大学数学系 李祥兆 (邮编:200062)

摘要 当代信息加工学习理论把人类的知识分成两类:陈述性知识和程序性知识。由于这两类知识在大脑中的表征和贮存方式不同,因此获得的方式也不同。数学教学内容如何根据这两类知识进行教学设计,提高教与学的有效性,是现代教学设计技术的基本内容之一。

1 数学知识的分类

1.1 知识的概念

“知识”是一个非常普通、常用的术语,但人们对它的理解却存在很大的分歧。信息加工学习理论提出的知识概念被大多数心理学家认同,对指导教学实践和教学设计有重要参考价值。该理论认为,知识与信息是一个相同的概念,所谓知识,就是主体通过与其环境相互作用而获得的信息及其组织。同时,该理论把人类知识分为两大类型:即“知什么”的陈述性知识和“知如何”的程序性知识。

1.2 数学陈述性知识

凡是需要有意识地回忆出来的知识称为陈述性知识,它用于回答“是什么”的问题。例如,“三角形内角和是多少度”、“等腰三角形有哪些性质”等,这是根据提取线索能直接陈述的知识,一般通过记忆获得。这类知识在数学教材中占有部分比重,我们通常说的传授知识是指这类知识。由此可见,陈述性知识相当于传统意义上的“知识”概念,包括一般意义上的概念和规则。

1.3 数学程序性知识

数学程序性知识是指数学概念和规则的运用和具体操作,是个体具有的用于具体情境的算法或一套行为步骤,它用于回答“怎么办”的问题。如回答“(1/2) + (1/3) = ?”、“解不等式 $1 - 2x > 3x + 5$ ”,等等,表明学生获得了运用概念和规则办事的能力(技能)和解决问题的策略(方法)。程序性知识属于传统意义上的“技能”概念。信息加工学习理论用程序性知识来解释技能,并对技能的概念进行了分类。

一是智慧技能,是人们运用概念和规则对外顺利办事的能力。加涅把智慧技能的学习分为4个亚类^[1]:辨别→概念→规则→高级规则。表示了智慧技能的学习,互为前提,互为条件。辨别是最低级的智慧技能,是概念学习的先决条件(从属技能)……依次构成了智慧技能学习的层级关系。这种层级关系揭示了技能学习的本质,为教学设计提供了重要的理论依据。

二是认知策略,也称策略性知识,是学生用来调节

自己内部认知活动,如学习、记忆、思维等过程的技能。我们通常所说的学习方法,实际上主要是指认知策略;我们常说要使学生学会学习,实质上主要就是使学生掌握有效的认知策略。所以,加涅把认知策略称为“动脑”的方法。心理学研究表明,认知策略是能够学会的,而且当学会了这些策略时,它们能迁移到新的问题情境中去。由此可见,教导学生会学习,即掌握有效的认知策略在教学的目标中占有特别重要的位置。

三是动作技能,又称运动技能。它是通过练习而形成的完成一定的肌肉运动的能力,它以明显的行动表现出来。而行动包括两种成分:一是描述如何进行运动的规则,这在行动中处于支配地位;一是因练习与反馈而逐渐变得精确和连贯的实际肌肉运动。前者属于程序性知识的范围。所以动作技能是协调身体运动的能力。如尺规作图、几何画板操作、图形计算器的使用、多媒体课件的操作等。

2 针对数学知识的特点进行教学设计

教学设计是运用系统方法对各种课程资源进行有机整合,对教学过程中相互联系的各个部分做出整体安排的一种构想,即为达到教学目标,对教什么、怎样教、达到什么结果所进行的策划。我国学者皮连生认为^[2],良好的教学设计至少包括如下步骤:第一,规定教学的预期目标。目标的陈述应尽可能明确、具体,尽可能用要观察和可测量的行为变化来作为教学结果的指标。第二,确定学生的起点状态,包括他们的原有知识、技能和学习动机、状态等。第三,分析学生从起点状态过渡到终点状态(教学预期目标)应掌握的知识技能或应形成的态度与行为习惯。第四,考虑用什么方式和方法给学生呈现教材并提供学习指导。第五,考虑用什么方法引起学生的反应并提供反馈(即平时所说的练习设计)。最后,考虑如何对教学的结果进行科学的测量与评价,主要指考卷如何编,分数如何评。因此,教师进行教学设计时,首先必须对他所教的知识类型加以鉴别,即确定所教的是哪类知识,使设计与教学更具针对性和有效性。下面就数学知识类型的特点简述教学设计的基本要求。

2.1 根据数学陈述性知识的特点进行教学设计

陈述性数学知识主要是指个人具有的有关数学概念、命题、公式、法则、定理、公理等方面的知识。检查这类知识的行为标准是看学生能否回答“是什么”的问题。如问:什么是无理数?勾股定理有什么性质?二次方程根与系数有什么关系?多边形的内角和公式是什么?如果学生能正确回答这些问题,我们便可以作出他们已获得了数学陈述性知识的推论。

陈述性知识的基本特点是:一是从心理表征和贮存看,陈述性知识以命题形式表征并以命题网络形式贮存;二是从激活和提取看,陈述性知识的激活速度慢,其提取是一个有意识的过程;三是从测量学的观点看,是学生能回答“是什么”或“为什么”这样的问题;四是从对信息的处理方式和结果看,陈述性知识描述外部世界,是相对静态的,它们的输入与输出几乎没有什么变化。例如,学生学习了三角形内角和等于 180° ,经过同化处理以后,在遇到求三角形内角和时,提取出来的仍然是 180° ;五是陈述性知识习得速度快,遗忘也快。

根据陈述性知识这些特点,我们在进行教学设计时应考虑如下策略:一是教学目标的确定应明确学生回忆知识的能力。对这类知识(能力)的检查方法,是要求学生口头或书面陈述学到的知识(当然不是逐字逐句陈述),即可证明学生是否具备了这种能力。二是教师应考虑如何帮助学生去掌握这种知识。这是教学设计的重点。促进陈述性知识学习的教学策略,关键是促使学生对知识的理解过程,而理解的实质是学生知道新知识的内部联系,也清楚新旧知识间的关系。奥苏贝尔的同化学习理论强调了知识的理解过程是新知识与认知结构中原有的有关知识建立联系并发生相互作用的过程。要使这一过程顺利进行,教学设计必须考虑学生自身的条件,如他们的学习动机、原有知识状况和学习习惯等;还要考虑学生自身以外的条件,如教材呈现方式、直观教具的使用、提问和反馈的方式等。并且,奥苏贝尔提出了设计“先行组织者”的技术,利用外部教学手段促进新旧知识相互联系。总之,由于陈述性知识的贮存和提取的关键是编码,其教学设计必须以知识的理解为核心。只有理解了的知识才能按意义进行编码、组织,从而形成良好的认知结构。

2.2 根据数学程序性知识的特点进行教学设计

数学程序性知识是个人具有的有关“怎么办”或“如何做”的数学知识,主要是关于数学运算、算法之类的操作性知识。例如:学生学习了基本作图,能够正确画出角的平分线;学习了如何解方程,能够顺利解决方程问题;学习了求根公式,能够利用求根公式进行解题。学生能正确和顺利地办成这些事,我们可以作出他们获得了相应的程序性知识或智慧技能的推论。

程序性知识的基本特点:一是从心理表征和贮存看,程序性知识以产生式表征并以产生式系统贮存;二是从测量学的观点看,学生能完成“怎么办”或“如何做”的认知任务;三是从激活和提取看,程序性知识激活的速度快,而且往往是一个自动化的过程,很少或不需要意识的控制;四是从对信息的处理和结果看,程序性知识是动态的,它要对外部世界施加影响,其程序用于转换信息,如输入的信息是“求方程 $3x - 5 = 1 - x$ 的解”,经过处理,输出的结果是“先移项,合并同类项,把未知数的系数化为1”;五是程序性知识习得速度慢,遗忘也慢。

在进行教学设计时,我们应根据程序性知识的这些特点,采取相应的设计策略。首先是教学目标的设计,应是考查学生应用概念和规则办事的能力(这种新的智慧技能观指学生掌握的程序性知识,实质上主要是掌握概念和由概念构成的规则,使之支配人的行为)。检验学生这种能力的行为指标,不是他们能告诉我们学到了什么,而是在面对各种情境时,必须应用学过的概念与规则顺利地进行运算和操作。只有看到学生顺利地运用概念或规则办事,我们才能认可他掌握了程序问题:一是对概念或规则理解的设计,这点同陈述性知识的教学设计是相同的。因为概念或规则首先是以陈述性知识的形式获得。二是例证的设计与运用。例证有正反例证之分,如“平行四边形”这个概念的例证是矩形、菱形、正方形,等等。它们同属于平行四边形这一类,故称之为正例(也称肯定例证)。不属于这一类的事物叫反例(也称否定例证),如梯形等。如果教学内容是概念,呈现正例有助于概括和迁移,但也可能导致泛化。正例要有变化,否则学生会将非本质属性作为本质属性来概括。呈现反例有助于辨别,使概念精确。规则也有正反例,应引导学生将新习得的规则广泛运用于新情境,做到一见适当的条件,便能立即作出反应。这种反应可以是内部的,也可以是外显的。由于程序性知识获得的速度慢,因此必须经过充分的练习,才能形成熟练的技能。

3 知识类型的转化与变式练习的设计

3.1 知识类型的转化

安德森(Anderson, 1983)提出了陈述性知识向程序性知识转化的理论。这一理论研究表明,若将教学局限于某一课题的理论,即仅侧重于陈述性知识的教学,是不利的。研究表明,让学生有机会参与问题的解决,将有助于学生将理论(陈述性知识)转化为问题解决的程序(程序性知识)。例如,同样是一个概念或规则,如果学生记住了它的含义,并能用自己的话来陈述它,只能说明概念或规则的学习还处在陈述性知识阶段,尚未转化为一种解决问题的技能。因此,教学设计

(下转第30页)

证明 如图 1, 设 $PF_2 F_1 = \alpha$, 则 $QF_2 M = \alpha$ 。

于是 $|PF_2| = 2c \cos \alpha$, $|QF_2| = \frac{|MF_2|}{\cos \alpha} = \frac{b^2}{c \cos \alpha}$,

所以 $|PF_2| + |QF_2| = 2b^2$

因为 $PF_1 \perp PF_2$, 所以点 P 不在 x 轴上, 由引理, 可以得到

$$|PF_1| + |PF_2| = \frac{2b^2}{1 + \cos 90^\circ} = 2b^2$$

对比、可知 $|PF_1| = |QF_2|$ 。

评注 对于满足条件的焦点在 y 轴上的椭圆, 该结论也成立。

结论 2 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, ($c > 0, c \geq b$), P 是椭圆上一点, 且 $PF_1 \perp PF_2$, l 是相应于焦点 F_2 的准线, 直线 PF_2 与 l 相交于点 Q , 则 $\frac{|QF_2|}{|PF_2|} = |k_{PF_2}|$ 。

证明 设 $PF_2 F_1 = \alpha$,

在 $F_1 PF_2$ 中, $\tan \alpha = \frac{|PF_1|}{|PF_2|}$, 且 $|k_{PF_2}| = \tan \alpha$ 。

由结论 1 可得 $|PF_1| = |QF_2|$,

所以 $\tan \alpha = \frac{|QF_2|}{|PF_2|}$, 命题获证。

评注 (1) 该结论是文[1]中的一个结论, 但文[1]的证明相对比较复杂, 而利用本文的结论 1, 能够比较简洁地对该结论进行证明。

(2) 对于满足条件的焦点在 y 轴上的椭圆, 该结论也成立。

如果将结论 1 当中的椭圆换成双曲线, 则可以得到以下的结论 3。

结论 3 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, ($c > 0$), P 是双曲线右支上一点, 且 $PF_1 \perp PF_2$, l 是相应于焦点 F_2 的准线, 直线 PF_2 与 l 相交于点 Q , 则 $|PF_1| = |QF_2|$ 。(证明与结论 1 的证明类似, 这里从略)

结论 4 如图 1 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, P 是椭圆上一点, l 是相应于焦点 F_2 的准线, 直线 PF_2 与 l 相交于点 Q ,

若 $|PF_1| = |QF_2|$, 则 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $c \geq b$ 。

证明 显然, 若 P 在椭圆 x 轴的两个顶点处, 则 $|PF_1| \neq |QF_2|$, 因此点 P 不在 x 轴上。

设 $F_1 PF_2 = \theta$, $PF_2 F_1 = \alpha$, 则 $QF_2 M = \alpha$, 过 F_1 作 $F_1 P' \perp PF_2$ 交直线 PF_2 于 P' , 那么

$$|P'F_2| = 2c \cos \alpha, |QF_2| = \frac{|MF_2|}{\cos \alpha} = \frac{b^2}{c \cos \alpha}, \text{ 所以}$$

$$|P'F_2| + |QF_2| = 2b^2$$

而点 P 不在 x 轴上, 由引理, 可得

$$|PF_1| + |PF_2| = \frac{2b^2}{1 + \cos \theta}$$

而 $|PF_1| = |QF_2|$, 因此两式相比, 有

$$\frac{|P'F_2|}{|PF_2|} = 1 + \cos \theta。$$

(1) 若 $F_1 PF_2$ 是锐角, 则 $\frac{|P'F_2|}{|PF_2|} = 1 + \cos \theta > 1$,

而此时 P 在 PF_2 上, 显然有 $\frac{|P'F_2|}{|PF_2|} < 1$, 矛盾。

(2) 若 $F_1 PF_2$ 是钝角, 则 $\frac{|P'F_2|}{|PF_2|} = 1 + \cos \theta < 1$,

而此时 P 在 PF_2 的延长线上, 显然有 $\frac{|P'F_2|}{|PF_2|} > 1$, 矛盾。

综上所述, $F_1 PF_2 = 90^\circ$, 因此 $PF_1 \perp PF_2$, 而在椭圆上存在一点 P 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 则必有 $c \geq b$ 。命题获证。

将结论 4 类比到双曲线, 可以得到以下结论。

结论 5 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ ($c > 0$), P 是双曲线右支上一点, l 是相应于焦点 F_2 的准线, 直线 PF_2 与 l 相交于点 Q , 若 $|PF_1| = |QF_2|$, 则 $PF_1 \perp PF_2$ 。(证明与结论 4 类似, 这里从略)

参考文献

1 李正谦, 朱冬茂。一道高考解析几何试题的引申。中学教研(数学), 2004(9)。

(收稿日期 2005 - 01 - 15)

(上接第 13 页)

应注重不同知识类型之间的转化, 提高学生解决问题的技能。

3.2 变式练习

要使学生将理解的概念和规则转化为一种自身的能力, 需要通过变式练习。所谓变式练习, 就是在其它有效学习条件不变的情况下, 对概念和规则的例证作出的变化。也就是说, 在知识习得阶段, 对概念和规

则正例的设计要有变化, 才能帮助学生排除无关特征的干扰。在知识转化和应用阶段, 进一步应对设计的题型或问题情景要有变化, 方能帮助学生获得熟练解决问题的技能。由此可见, 知识的转化与技能的形成, 并非一般的练习或题海战术能够一蹴而就, 需要教师认真的研究, 精心的设计。

(收稿日期 2004 - 12 - 29)