

**例 4:** 已知过椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左顶点  $(-a, 0)$  的两条相互垂直的弦与椭圆分别相交

于点  $P$ 、 $Q$ ，则直线  $PQ$  具有何特征？

**[简要步骤]:**

(1) 显示坐标轴，在  $x$  负半轴、 $y$  正半轴上分别取点  $C$ 、 $D$ ，分别以原点为圆心，点  $C$ 、 $D$  为圆上的点作大圆和小圆，并由此作出椭圆；

(2) 测量点  $C$ 、 $D$  的坐标  $(-a, 0)$ 、 $(0, b)$ ，并算得  $a$ 、 $b$  的值；

(3) 在椭圆上任取一点  $P$ ，作点  $P$  的动画按钮；

(4) 连接  $CP$ ，并过点  $C$  作  $CP$  的垂线  $l$ 。

由于几何画板无法直接作出直线与轨迹（椭圆）的交点，因此需要间接获得交点。我们可以算出交点的横坐标，然后作直线“ $x$ =交点的横坐标”，于是便可获得交点。本题中，由

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = k(x+a), \end{cases} \text{解得 } x = \frac{ab^2 - a^3k^2}{a^2k^2 + b^2}, \text{ 其中 } a、b \text{ 的值已算得，因此只需再测得垂线 } l \text{ 的斜率 } k,$$

便可算出垂线  $l$  与椭圆的交点的横坐标。

(5) 测量垂线  $l$  的斜率，将标签改为  $k$ ；

(6) 计算  $\frac{ab^2 - a^3k^2}{a^2k^2 + b^2}$  的值，绘制点  $(\frac{ab^2 - a^3k^2}{a^2k^2 + b^2}, 0)$ ，过该点作  $x$  轴的垂线，并作出该垂线与  $l$  的交点  $Q$ ；

(7) 作过点  $P$ 、 $Q$  的直线，如图 8.6；

(8) 单击动画按钮，观察该直线的特征。

可以看到该直线过定点，可以证明该定点为  $(\frac{-a(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}, 0)$ 。

进一步探索：如果将题目条件改为“已知过椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上任意一点的两条相互垂直

的弦与椭圆分别相交于点  $P$ 、 $Q$ ”，则直线  $PQ$  是否还具有同样的特征？

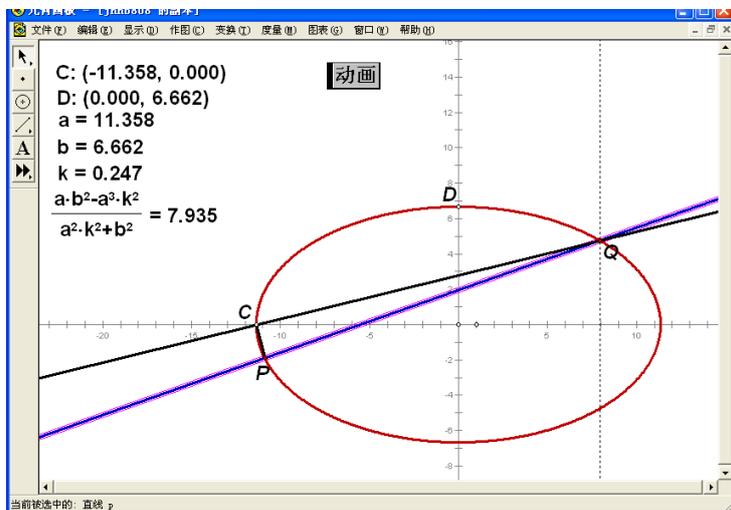


图 6.12

例 5: 如图 6.13, 求边长为  $a$  的正方形中红色区域的面积。

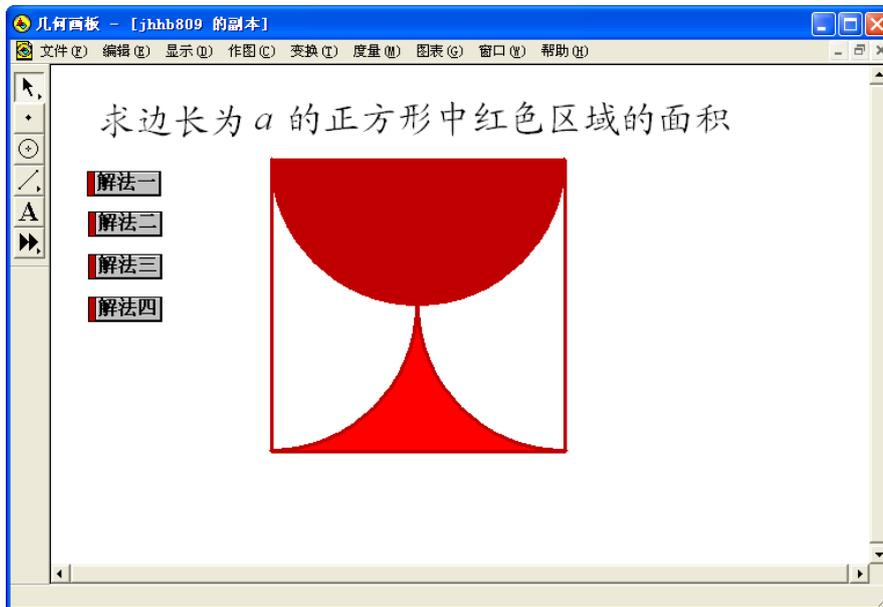


图 6.13

分析: 本课件制作的一个难点是为形如“酒杯”的底部区域涂上红色。由于是轴对称图形, 因此只需考虑右半部分(或左半部分)。一种涂色的方法: 可在右半部分的圆弧上任取一点, 并作正方形底边的平行线段, 线段的另一个端点为平行线与对称轴的交点, 然后将该线段变为红色, 并作该线段的轨迹。另一种涂色的方法是用“以直代曲”的方法, 在圆弧上取若干个, 然后以多边形代替曲边三角形。本课件制作中介绍的是后一种方法。

本题可将“酒杯”底部的左、右半部分分别绕正方形的中心旋转 $-90^\circ$ 、 $90^\circ$ , 便可发现红色区域的面积为正方形面积的一半。也可将“酒杯”底部的左、右半部分分别平移, 当然也可以将半圆的左、右半部分分别平移或绕正方形的中心旋转, 同样也可发现红色区域的面积为正方形面积的一半。因此在本课件制作中, 需要考虑如何使这 4 种不同解法互相独立, 互不干扰。

**[简要步骤]:**

(1) 作正方形  $ABCD$  及  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  的中点  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ , 连接  $EG$ 、 $FH$  得交点  $I$ ;

(2) 以点  $G$  为圆心, 作弧  $IC$ , 将扇形  $GIC$  及弧  $IC$  改为红色;

(3) 以点  $F$  为圆心, 作弧  $IB$ , 10 等分弧  $IB$ , 得等分点  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $\dots$ 、 $I_9$ , 依次选中点  $I_1I_2I_3I_4I_5I_6I_7I_8I_9BEI$ , 作多边形内部, 并将此内部及弧  $IB$  改为红色, 隐藏点  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $\dots$ 、 $I_9$ ;

(4) 以点  $I$  为圆心, 作弧  $EF$ , 在弧  $EF$  上任取一点  $J$ , 标识角度  $EIJ$ , 以点  $I$  为旋转中心, 将多边形内部及弧  $IB$  按标识角度  $EIJ$  旋转, 得图形①, 以  $EG$  为对称轴, 得与图形①对称的图形②, 选中图形①和图形②, 分别做两个显示/隐藏按钮, 一个用来隐藏对象, 一个用来显示对象, 记作显示 1、隐藏 1;

(5) 作点  $J$  到点  $F$  的慢速的运动按钮, 以及作点  $J$  到点  $E$  的运动按钮, 单击隐藏 1 按钮, 隐藏点  $J$  和弧  $EF$ ;

(6) 以点  $I$  为圆心, 作弧  $HE$ , 在弧  $HE$  上任取一点  $K$ , 标识向量  $EK$ , 将多边形内部及弧  $IB$  按标识向量平移, 得图形③, 以  $EG$  为对称轴, 得与图形③对称的图形④, 选中图形③和图形④, 作两个显示/隐藏按钮, 记作显示 2、隐藏 2;

(7) 作点  $K$  到点  $H$  的慢速的运动按钮，以及作点  $K$  到点  $E$  的运动按钮，隐藏点  $K$  和弧  $HE$ ；

(8) 以点  $I$  为圆心，作弧  $FG$ ，在弧  $FG$  上任取一点  $L$ ，标识角度  $GIL$ ，以点  $I$  为旋转中心，将扇形  $GIC$  内部及弧  $IC$  按标识角度  $GIL$  旋转，得图形⑤，以  $EG$  为对称轴，得与图形⑤对称的图形⑥，选中图形⑤和图形⑥，作两个显示/隐藏按钮，记作显示 3、隐藏 3；

(9) 作点  $L$  到点  $F$  的慢速的运动按钮，以及作点  $L$  到点  $G$  的运动按钮，单击隐藏 3 按钮，隐藏点  $L$  和弧  $FG$ ；

(10) 以点  $I$  为圆心，作弧  $GH$ ，在弧  $GH$  上任取一点  $M$ ，标识向量  $GM$ ，将扇形  $GIC$  内部及弧  $IC$  按标识向量平移，得图形⑦，以  $EG$  为对称轴，得与图形⑦对称的图形⑧，选中图形⑦和图形⑧，作两个显示/隐藏按钮，记作显示 4、隐藏 4；

(11) 作点  $M$  到点  $H$  的慢速的运动按钮，以及作点  $M$  到点  $G$  的运动按钮，隐藏点  $M$  和弧  $GH$ ；

(12) 依次选择显示 1、隐藏 2、运动  $J \rightarrow F$ 、运动  $J \rightarrow E$  按钮，作序列按钮，选择依次执行，动作之间暂停 1 秒；

(13) 依次选择显示 2、隐藏 1 运动  $K \rightarrow H$ 、运动  $K \rightarrow E$  按钮，作序列按钮，选择依次执行，动作之间暂停 1 秒；

(14) 依次选择显示 3、隐藏 4、运动  $L \rightarrow F$ 、运动  $L \rightarrow G$  按钮，作序列按钮，选择依次执行，动作之间暂停 1 秒；

(15) 依次选择显示 4、隐藏 3、运动  $M \rightarrow H$ 、运动  $M \rightarrow G$  按钮，作序列按钮，选择依次执行，动作之间暂停 1 秒。分别将这 4 个序列按钮改为解法一、解法二、解法三和解法四，如图 6.14；

(16) 隐藏线段  $EG$ 、 $FH$  和点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ 、 $I$ ，隐藏所有的显示、隐藏按钮和运动按钮。

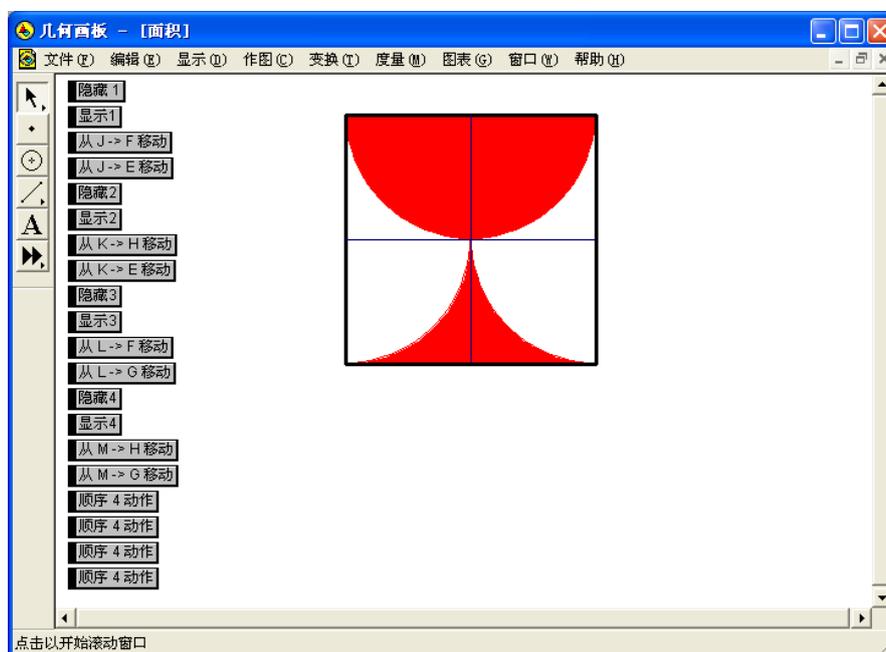


图 6.14

例 6: 制作可上下移动的弹簧，如图 6.15。

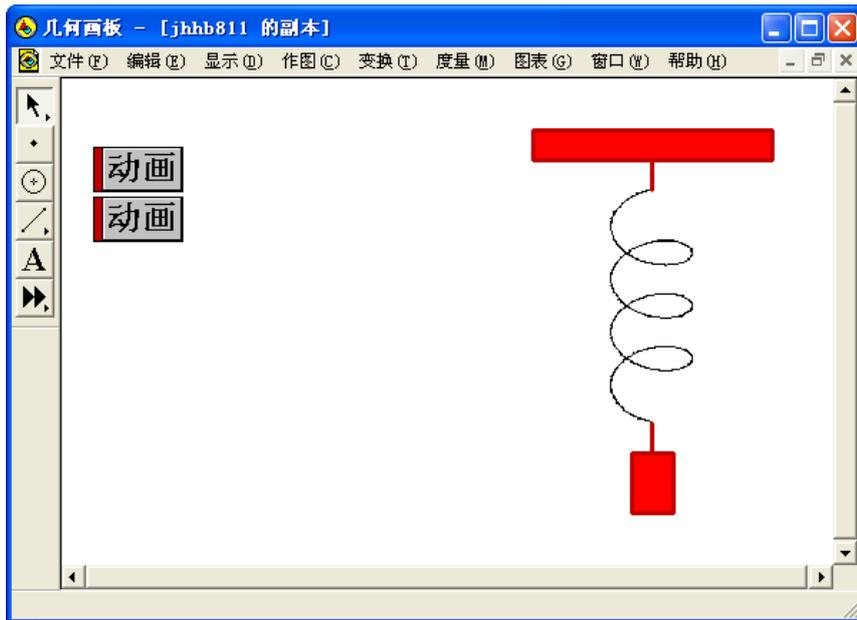


图 6.15

分析：要制作可上下移动的弹簧，需要利用几何画板先画一个弹簧，然后将所画的弹簧复制到 word 中，设法变成一幅图片（如 gif 格式），再复制到几何画板中。

**[简要步骤]:**

- (1) 显示坐标轴，其中点  $A$  为原点，点  $B$  为单位点，在  $x$  轴上取两点  $C$ 、 $D$ ，连接  $CD$ ，在线段  $CD$  上任取一点  $E$ ，将点  $E$  绕着原点  $A$  旋转，得点  $E'$ ；
- (2) 将单位点  $B$  绕着原点  $A$  分别旋转  $-150^\circ$ 、 $-30^\circ$ 、 $90^\circ$ ，得点  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ ，连接  $AX$ 、 $AY$ 、 $AZ$ ，建立空间坐标系  $A-xyz$ ；
- (3) 度量点  $E$  的横坐标，将标签改为  $t$ ，并计算  $\sin(5t)$ 、 $\cos(5t)$  的值；
- (4) 作出函数  $x=\sin(5t)$  的图像，并作出与  $x$  轴的交点  $F$ ，将点  $F$  绕着原点  $A$  旋转  $-150^\circ$ ，得点  $F'$ ，隐藏点  $F$  和过点  $F$  的直线；
- (5) 作出函数  $x=\cos(5t)$  的图像，并作出与  $x$  轴的交点  $G$ ，将点  $G$  绕着原点  $A$  旋转  $-30^\circ$ ，得点  $G'$ ，隐藏点  $G$  和过点  $G$  的直线，将角度制改为弧度制；
- (6) 作线段  $HI$ 、 $IJ$ ，选中线段  $HI$ 、 $IJ$ ，并标识比例，以原点  $A$  为缩放中心，将点  $F'$ 、 $G'$  按标识比例进行缩放，得点  $F''$ 、 $G''$ ，隐藏点  $F'$ 、 $G'$ ；
- (7) 依次选中点  $A$ 、 $G''$ ，标识向量，按标识向量平移点  $F''$ ，得点  $K$ ；依次选中点  $A$ 、 $E'$ ，标识向量，按标识向量平移点  $K$ ，得点  $K'$ ；
- (8) 选中点  $K'$ 、 $E$ ，作出轨迹，将轨迹改成粗线，如图 6.16。
- (9) 保留弹簧轨迹，其余的对象全部隐藏，弹簧制作成功了。

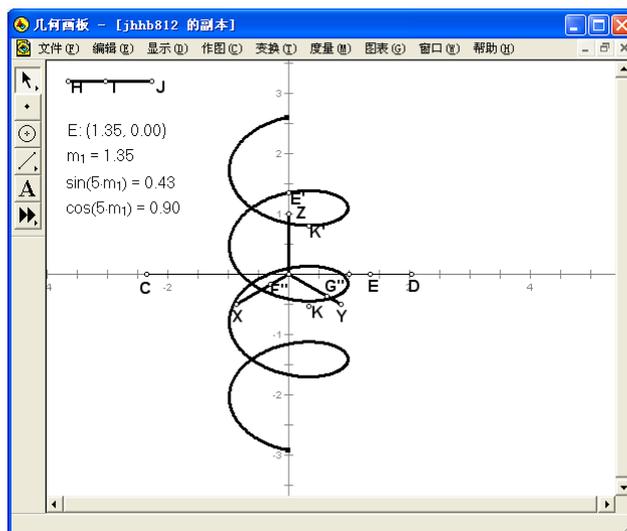


图 6.16

(10) 选中弹簧，复制到剪贴板中，然后粘贴到 word 中，另存为 web 格式，便可得到弹簧图片（gif 文件），然后在 word 中，插入弹簧图片（gif 文件），重新复制到剪贴板中，这样便可粘贴到几何画板中。

有了弹簧图片后，就可制作能上下移动的弹簧了。

(11) 任取一点  $A$ ，向右平移 8cm 得点  $B$ ，将点  $B$ 、 $A$  向上平移 1cm 得点  $C$ 、 $D$ ，连接  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$ ，作矩形  $ABCD$  内部，并改为红色；

(12) 作线段  $AB$  的中点  $E$ ，过点  $E$  作  $AB$  的垂线  $l$ ，将点  $E$  向下平移 1cm（ $y$  方向平移 -1cm）得点  $F$ ，连接  $EF$ ，过点  $F$  作  $AB$  的平行线，在所作的平行线上直线  $l$  的左侧任取一点  $G$ ，测出点  $G$ 、 $F$  的距离，标识该距离；

(13) 作圆  $H$ ，在圆  $H$  上任取一点  $I$ ，选中点  $I$ ，分别作快速和慢速的动画按钮；作过点  $I$  作  $l$  的垂线，垂足为  $J$ ，将点  $J$  向右按标识的距离平移，得点  $K$ ；

(14) 选中点  $G$ 、 $K$ ，将剪贴板中的弹簧图片粘贴到以点  $G$ 、 $K$  为相对的两个顶点的矩形中，调整点  $G$  和圆的位置，使得弹簧大小适中；

(15) 将点  $J$  向下平移 1cm 得点  $L$ ，连接  $JL$ ，将点  $L$  向右平移 0.7cm 得点  $M$ ，将点  $M$  向下平移 2cm 得点  $N$ ，以直线  $l$  为对称轴，得点  $M$ 、 $N$  的对称点  $M'$ 、 $N'$ ，连接  $MN$ 、 $NN'$ 、 $N'M'$ 、 $M'M$ ，作矩形  $MNN'M'$  内部，并改为红色；

(16) 隐藏不需要的点和线，如图 6.16。