例 4: 作神奇的参数方程 $x(t) = \sin(at) + \cos(bt), y(t) = \sin(ct) + \cos(dt),$ ($0 \le t \le 2\pi$, a, b, c, d为非负整数)的图像。

形如 $x(t) = \sin(at) + \cos(bt)$, $y(t) = \sin(ct) + \cos(dt)$, $(0 \le t \le 2\pi, a, b, c, d, b)$ 非负整数)的参数方程具有许多特别的性质, 当 a, b, c, d 取不同的非负整数组合时, 方 程所代表的图像各式各样, 让人倍感参数方程的神奇魅力。比如:

- (1) 当a = c, b = d时,对应的图像是一条线段;
- (2) 当 $a = d = 0, b = c \neq 0$ 时或 $a = d \neq 0, b = c = 0$ 时,对应的图像是一个圆;
- (3) 当a = c = 0, $b = 2d \neq 0$ 或a = c = 0, $d = 2b \neq 0$ 时, 对应图像是一条抛物线;
- (4) 当 a、b、c、d 中仅有一个为 0, 其它三个相等时, 对应的图像是一个椭圆;
- (5) 当*a* = 4, *b* = 1, *c* = 1, *d* = 4时,对应的图像好像是一朵紫荆花;
- (6) 当 *a* = 4, *b* = 1, *c* = 1, *d* = 2 时, 方程对应的图像好像是一架直升飞机;



图 5.12

如图 5.12, ……

这样的例子我们还可以举出许多。为了进一步探索,我们先作出该参数方程的图像。 [简要步骤]

(1)将角度单位设置成"弧度"状态,先作一个圆 AB,在圆上任意取一点 C,依次选中 $B \setminus A \setminus C$,度量 $\angle BAC$ 的度数,将度量的标签改为 t,从而构造了一个任意角 t, $0 \le t \le 2\pi$;

(2) 打开"图表"菜单的"新建参数"命令,新建四个参数 a,b,c,d.

(4)利用参数值 a,b,c,d 和 t 进行计算,算得 sin(at) + cos(bt) 和 sin(ct) + cos(dt);

(5) 依次选中度量值 sin(at) + cos(bt) 和 sin(ct) + cos(dt), 在平面上绘制点 U(x, t)

y);

(6)选择点 *U*和点 *C*,利用作图菜单中"轨迹",得参数方程的图像,如图 5.13。 为了观察图像的周期性,可将点 *U* 设为轨迹跟踪点,且选择点 *C*,构造动画按钮。



图 5.13

改变参数 *a、b、c、d* 的值,根据以下不同的非负整数值观察图像的变化,看看与括号 里的"名称"是否吻合(必要时可改变单位长度):





分别拖动点 *a、b、c、d*,根据以下不同的非负整数值观察图像的变化,能否给图像以适当的名称?

 [1] a=4, b=3, c=5, d=2 (
);
 [2] a=5, b=2, c=2, d=3 (
);

 [3] a=12, b=0, c=11, d=0 (
);
 [4] a=d=6, b=c=9 (
)。

 讨论上述图像的周期性、对称性、封闭性。